Ví dụ trang 11 – Giải SIÊU CHẬM

Ví dụ này là **ví dụ chuẩn – mẫu gốc** cho **tích phân mặt loại 2 (thông lượng)**, nên anh **bắt buộc phải nắm**.

VÍ DỤ TRANG 11 (LÀM LẠI TỪ ĐẦU)

ĐỀ BÀI (viết lại cho rõ)

Tính tích phân mặt:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

trong đó:

$$\vec{F}(x,y,z) = (y,\ x,\ z)$$

và (S) là **biên của khối** $(E \subset \mathbb{R}^3)$ bị chặn bởi:

- paraboloid:
$$z = 1 - x^2 - y^2$$
- và mặt phẳng:
$$z = 0$$

Mặt (S) được **định hướng ra ngoài khối** (E).

BƯỚC 0 – NHẬN DẠNG BÀI (CỰC KỲ QUAN TRỌNG)

Anh **phải nhìn ra ngay**:

- Có **vectơ F**
- Có dấu $\cdot d\vec{S}$

Đây là **tích phân mặt loại 2 (thông lượng)**

BƯỚC 1 – HIỂU HÌNH HỌC TRƯỚC (KHÔNG ĐƯỢC BỎ)

Khối (E) là:

- phía **trên** mặt phẳng $(z = 0)$
- phía **dưới** paraboloid $(z = 1 - x^2 - y^2)$

Biên của khối (E) gồm **2 mặt**:

- **Mặt** S_1: paraboloid $(z = 1 - x^2 - y^2)$
- **Mặt** S_2: mặt phẳng $(z = 0)$

Không được quên:

$$S = S_1 \cup S_2$$

Tích phân trên (S) = tích phân trên (S_1) + tích phân trên (S_2)

BƯỚC 2 – CHIA BÀI TOÁN RA

Ta sẽ tính:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

PHẦN A – TÍNH TRÊN MẶT PARABOLOID (S_1)

A1. THAM SỐ HÓA MẶT (S_1)

Mặt có dạng:

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

Tham số hóa **chuẩn – không cần nghĩ**:

$$\vec{r}(x, y) = (x,\ y,\ 1 - x^2 - y^2)$$

Miền xác định:

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

(vì giao với $(z = 0)$ cho $(1 - x^2 - y^2 = 0)$)

A2. TÍNH $\vec{r}_x, \vec{r}_y$

Đạo hàm theo x:

$$\vec{r}_x = (1,\ 0,\ -2x)$$

Đạo hàm theo y:

$$\vec{r}_y = (0,\ 1,\ -2y)$$

A3. TÍNH TÍCH CÓ HƯỚNG $\vec{r}_x \times \vec{r}_y$

Lập định thức:

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix}$$

Tính từng thành phần:

- Thành phần i: $(0 \cdot (-2y) - (-2x) \cdot 1 = 2x)$
- Thành phần j: $(-[1 \cdot (-2y) - (-2x) \cdot 0] = 2y)$
- Thành phần k: $(1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1)$

Kết quả:

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (2x,\ 2y,\ 1)$$

A4. KIỂM TRA ĐỊNH HƯỚNG (CỰC KỲ QUAN TRỌNG)

- Thành phần $z = 1 > 0$

Pháp tuyến **hướng lên trên**
Khối (E) nằm **dưới paraboloid**
pháp tuyến ra ngoài **cũng hướng lên**
ĐÚNG HƯỚNG – KHÔNG ĐỔI DẤU

A5. THAY VÀO TÍCH PHÂN

Trường F trên mặt:

$$\vec{F}(\vec{r}(x,y)) = (y,\ x,\ 1 - x^2 - y^2)$$

Nhân vô hướng:

$$\vec{F} \cdot (\vec{r}_x \times \vec{r}_y)$$

$$= (y, x, 1 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1)$$

$$= 2xy + 2xy + 1 - x^2 - y^2$$

$$= 4xy + 1 - x^2 - y^2$$

A6. ĐỔI SANG TỌA ĐỘ CỰC (BẮT BUỘC)

Vì miền:

$$x^2 + y^2 \le 1$$

Đặt:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

Ta có:

- $(x^2 + y^2 = r^2)$
- $(4xy = 4r^2\cos\theta\sin\theta)$
- $(dx\,dy = r\,dr\,d\theta)$

A7. TÍNH TÍCH PHÂN (RẤT CHẬM)

$$\iint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (4r^2\cos\theta\sin\theta + 1 - r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

Tách ra:

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 (4r^3\cos\theta\sin\theta + r - r^3)\,dr\right]d\theta$$

Tính từng phần:

- $\int_0^1 r\,dr = \frac{1}{2}$
- $\int_0^1 r^3\,dr = \frac{1}{4}$
- $\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\,d\theta = 0$

Suy ra:

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\,d\theta = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

PHẦN B – MẶT PHẲNG $(S_2 : z = 0)$

B1. THAM SỐ HÓA

$$\vec{r}(x,y) = (x,y,0)$$

$$\vec{r}_x = (1,0,0), \quad \vec{r}_y = (0,1,0)$$

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (0,0,1)$$

Pháp tuyến **hướng lên**, nhưng **ra ngoài khối** tại đáy phải **hướng xuống**
TRÁI ĐỊNH HƯỚNG → PHẢI ĐỔI DẤU

B2. TÍNH TÍCH PHÂN

$$\vec{F}(x, y, 0) = (y, x, 0)$$

$$(y, x, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0$$

Dù đổi dấu hay không:

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

KẾT LUẬN CUỐI CÙNG

$$\iint_{S} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{\pi}{2} + 0 = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

NHỮNG ĐIỀU ANH BẮT BUỘC PHẢI NHỚ TỪ VÍ DỤ NÀY

1. **Biên khối → chia thành nhiều mặt**
2. **Mỗi mặt phải xét định hướng riêng**
3. Paraboloid → **tọa độ cực**
4. Mặt phẳng đáy → thường cho **0**
5. Sai định hướng → **đổi dấu**

Ví dụ trang 14 – Giải SIÊU CHẬM

VÍ DỤ TRANG 14

DIỆN TÍCH MẶT TRÒN XOAY (GIẢI TỪ GỐC)

0. ĐỀ BÀI ĐANG NÓI GÌ? (HIỂU TIẾNG VIỆT TRƯỚC)

Tính diện tích của mặt tròn xoay nhận được bằng cách **xoay đồ thị**

$$y = f(x), \quad a \le x \le b$$

quanh trục x, giả sử (f) trơn và $f(x) \ge 0$.

Nói **bằng lời đời thường**:

- Ta có **một đường cong** trong mặt phẳng Oxy
- Ta **xoay đường đó quanh trục x**
- Kết quả là **một mặt cong trong không gian**
- Yêu cầu: **tính diện tích của cái mặt đó**

Đây **KHÔNG phải** diện tích hình phẳng
Đây là **diện tích mặt trong không gian 3D**

1. TẠI SAO ĐÂY LÀ TÍCH PHÂN MẶT LOẠI 1?

Vì:

- Đề bài hỏi **diện tích**
- Không có vectơ
- Không có dấu "·"

Đây là **tích phân mặt loại 1**
Công thức gốc:

$$\iint_S dS$$

2. VẤN ĐỀ LỚN NHẤT: MẶT NÀY TRÔNG RA SAO?

2.1. Lấy 1 điểm bất kỳ trên đồ thị

Trên đồ thị $y = f(x)$, lấy 1 điểm:

$$(x,\ f(x))$$

2.2. Khi xoay quanh trục x thì sao?

Điểm đó:

- Quay **tròn quanh trục x**
- Vẽ thành **1 đường tròn**
- Bán kính $= f(x)$

Vì vậy:

- **x giữ nguyên**
- **y, z thay đổi theo hình tròn**

3. THAM SỐ HÓA MẶT (CỰC KỲ QUAN TRỌNG)

Ta cần **2 tham số**:

Tham số 1: x

- Chạy từ (a) đến (b)

Tham số 2: θ

- Góc quay quanh trục x
- Chạy từ (0) đến (2π)

Tham số hóa chuẩn (PHẢI NHỚ)

$$\boxed{\vec{\phi}(x,\theta) = \big(x,\ f(x)\cos\theta,\ f(x)\sin\theta\big)}$$

Ý nghĩa từng thành phần:

- (x): trục xoay
- $(f(x)\cos\theta,\ f(x)\sin\theta)$: vẽ đường tròn bán kính $f(x)$

4. NHẮC LẠI CÔNG THỨC DIỆN TÍCH MẶT

Với tham số hóa $\vec{\phi}(x,\theta)$:

$$\text{Diện tích} = \iint |\vec{\phi}_x \times \vec{\phi}_\theta|\, dx\, d\theta$$

Bây giờ ta làm **từng bước một**, không nhảy.

5. TÍNH ĐẠO HÀM RIÊNG (CỰC CHẬM)

5.1. Đạo hàm theo x

$$\vec{\phi}_x = \left(\frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}[f(x)\cos\theta], \frac{\partial}{\partial x}[f(x)\sin\theta]\right)$$

Vì θ là hằng số khi đạo hàm theo x:

$$\boxed{\vec{\phi}_x = (1,\ f'(x)\cos\theta,\ f'(x)\sin\theta)}$$

5.2. Đạo hàm theo θ

$$\vec{\phi}_\theta = (0,\ -f(x)\sin\theta,\ f(x)\cos\theta)$$

Vì x là hằng số khi đạo hàm theo θ.

6. TÍCH CÓ HƯỚNG $\vec{\phi}_x \times \vec{\phi}_\theta$

Ta lập định thức:

$$\vec{\phi}_x \times \vec{\phi}_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & f'(x)\cos\theta & f'(x)\sin\theta \\ 0 & -f(x)\sin\theta & f(x)\cos\theta \end{vmatrix}$$

Tính từng dòng (chậm):

- Thành phần i:

$$f'(x)\cos\theta \cdot f(x)\cos\theta + f'(x)\sin\theta \cdot (-f(x)\sin\theta) = f'(x)f(x)$$

- Thành phần j:

$$-\big(1 \cdot f(x)\cos\theta - 0\big) = -f(x)\cos\theta$$

- Thành phần k:

$$1 \cdot (-f(x)\sin\theta) - 0 = -f(x)\sin\theta$$

Kết quả:

$$\vec{\phi}_x \times \vec{\phi}_\theta = \big(f'(x)f(x),\ -f(x)\cos\theta,\ -f(x)\sin\theta\big)$$

7. LẤY ĐỘ DÀI VECTƠ (KHÚC DỄ SAI NHẤT)

$$|\vec{\phi}_x \times \vec{\phi}_\theta| = \sqrt{[f'(x)f(x)]^2 + [f(x)\cos\theta]^2 + [f(x)\sin\theta]^2}$$

Gộp lại:

$$= \sqrt{f(x)^2[f'(x)]^2 + f(x)^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}$$

Nhớ:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

Suy ra:

$$\boxed{|\vec{\phi}_x \times \vec{\phi}_\theta| = f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}}$$

8. LẬP TÍCH PHÂN DIỆN TÍCH

Miền tham số:

- $a \le x \le b$
- $0 \le \theta \le 2\pi$

$$\text{Diện tích} = \int_0^{2\pi} \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\,d\theta$$

9. TÍCH PHÂN THEO θ (CỰC DỄ)

Biểu thức **không phụ thuộc** θ nên:

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

10. KẾT QUẢ CUỐI CÙNG (CÔNG THỨC VÀNG)

$$\boxed{\text{Diện tích mặt tròn xoay} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}$$

11. TÓM TẮT ĐỂ ANH NHỚ DỄ

Thành phần	**Ý nghĩa**
2π	quay tròn
$f(x)$	bán kính
$\sqrt{1+[f'(x)]^2}$	độ nghiêng của đường cong
dx	lát mỏng theo trục x

12. CÂU CHỐT (NHỚ 1 CÂU LÀ ĐỦ)

Diện tích mặt tròn xoay = chu vi vòng tròn × độ dài cung cong

Ví dụ trang 36 – Định lý Stokes

Đề bài (viết lại cho dễ đọc)

Dùng **Định lý Stokes** để tính

$$\iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot d\vec{S}$$

trong đó

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xz,\ yz,\ xy)$$

- (S): phần mặt cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

- (S) nằm trong hình trụ

$$x^2 + y^2 = 1$$

- (S) ở phía trên mặt phẳng (Oxy) (tức là $z \geq 0$)
- Vector pháp tuyến hướng lên trên

Mục tiêu chiến lược

Ta **không** tính tích phân mặt trực tiếp (rất khó). ⇒ Dùng Stokes để đổi sang tích phân đường.

Bước 1. Nhớ lại định lý Stokes (cực quan trọng)

$$\boxed{\iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\vec{r}}$$

- $C = \partial S$: biên của mặt (S)
- Hướng của (C): tuân theo quy tắc bàn tay phải

⇒ Bài toán chuyển thành:

1. Tìm đường cong (C)
2. Tham số hóa (C)
3. Tính tích phân đường

Bước 2. Tìm biên ($C = \partial S$)

(C) là giao của:

- Mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
- Hình trụ: $x^2 + y^2 = 1$

Giải hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow z^2 = 3 \Rightarrow z = \sqrt{3}$$

(Chỉ lấy $+\sqrt{3}$ vì mặt nằm trên mặt phẳng Oxy)

$$\boxed{C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = \sqrt{3} \end{cases}}$$

$\Rightarrow$ Đường tròn bán kính 1, song song với mặt phẳng Oxy.

Bước 3. Xác định hướng của (C)

- Pháp tuyến của (S): hướng lên trên
- Dùng quy tắc bàn tay phải

$\Rightarrow$ Khi nhìn từ trên xuống, (C) chạy ngược chiều kim đồng hồ.

Bước 4. Tham số hóa đường (C)

Vì là đường tròn bán kính 1:

$$\boxed{\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \sqrt{3} \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi}$$

Dạng vector:

$$\vec{r}(t) = (\cos t,\ \sin t,\ \sqrt{3})$$

Đạo hàm:

$$\vec{r}'(t) = (-\sin t,\ \cos t,\ 0)$$

Bước 5. Tính $\mathbf{F}(\vec{r}(t))$

Nhắc lại:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xz,\ yz,\ xy)$$

Thay vào:

$$\mathbf{F}(\vec{r}(t)) = (\sqrt{3}\cos t,\ \sqrt{3}\sin t,\ \cos t \sin t)$$

Bước 6. Tính tích vô hướng

$\mathbf{F} \cdot d\vec{r}$:

$$\mathbf{F} \cdot d\vec{r} = \mathbf{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt$$

Tính từng hạng:

$$(\sqrt{3}\cos t)(-\sin t) + (\sqrt{3}\sin t)(\cos t) + (\cos t \sin t)(0)$$

Rút gọn:

$$-\sqrt{3}\cos t \sin t + \sqrt{3}\sin t \cos t = 0$$

$\Rightarrow$ Hai hạng triệt tiêu nhau.

Bước 7. Tích phân đường

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} 0\, dt = \boxed{0}$$

Bước 8. Kết luận cuối cùng

Theo định lý Stokes:

$$\boxed{\iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot d\vec{S} = 0}$$

Tổng kết "công thức làm bài" (cần thuộc)

Khi gặp dạng **"Dùng Stokes để tính tích phân mặt"**:

1. Viết công thức Stokes
2. Tìm biên ($C = \partial S$)
3. Xác định hướng
4. Tham số hóa (C)
5. Thay vào **F**
6. Tính tích vô hướng
7. Tích phân theo t

Ví dụ trang 38 – Định lý Stokes

Đề bài (viết lại cho dễ đọc)

Cho **trường vector**

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2,\ y^3,\ z^4)$$

Cho **đường cong kín (C)** là **đường tam giác** có các đỉnh theo **thứ tự**:

$$A(1, 2, 3)\ \rightarrow\ B(2, 0, -1)\ \rightarrow\ C(4, 3, 1)\ \rightarrow\ A$$

Tính tích phân đường:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\vec{s}$$

Chiến lược nhìn nhanh

- (C) là **đường kín**
- **F** có dạng **mỗi thành phần chỉ phụ thuộc 1 biến**

⇒ Ngửi mùi "curl = 0" ⇒ Dùng định lý Stokes → khỏi tham số hóa tam giác

Bước 1. Nhớ định lý Stokes

$$\boxed{\oint_C \mathbf{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot d\vec{S}}$$

Trong đó:

- (S): **bất kỳ mặt nào có biên là (C)** (tam giác, mặt phẳng, cong... đều được)

⇒ Nếu curl = 0 ⇒ tích phân = 0

Bước 2. Tính curl của F

Nhắc lại công thức curl (phải thuộc):

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Với:

$$P = x^2, \quad Q = y^3, \quad R = z^4$$

Tính từng thành phần (chậm nhé)

Thành phần (i):

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial(z^4)}{\partial y} - \frac{\partial(y^3)}{\partial z} = 0 - 0 = 0$$

Thành phần (j):

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial(x^2)}{\partial z} - \frac{\partial(z^4)}{\partial x} = 0 - 0 = 0$$

Thành phần (k):

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(y^3)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2)}{\partial y} = 0 - 0 = 0$$

Kết luận curl

$$\boxed{\operatorname{curl}\mathbf{F} = (0, 0, 0)}$$

Bước 3. Áp dụng định lý Stokes

Thay vào công thức:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S (0, 0, 0) \cdot d\vec{S}$$

Tích phân của số 0 thì bằng?

$$\boxed{0}$$

Kết luận cuối cùng

$$\boxed{\oint_C \mathbf{F} \cdot d\vec{s} = 0}$$

Giải thích trực giác (rất quan trọng)

Trường:

$$\mathbf{F} = (x^2, y^3, z^4)$$

- Mỗi thành phần **chỉ phụ thuộc 1 biến**
- Không có xoáy (curl = 0)
- Là **trường thế (conservative field)**

Với **mọi đường kín**:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

Công thức nhận dạng nhanh (đi thi cực ngon)

Chỉ cần thấy:

- $\mathbf{F} = (f(x), g(y), h(z))$
- (C) là **đường kín**

$\Rightarrow$ Chốt luôn:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

Ví dụ trang 39 – Định lý Stokes

Đề bài (viết lại cho dễ hiểu)

Dùng **Định lý Stokes** để tính

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\vec{s}$$

với

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-y^2,\ x,\ z^2)$$

Trong đó:

- (C) là **đường cong giao tuyến** của:
  - mặt phẳng: $y + z = 2$
  - hình trụ: $x^2 + y^2 = 1$
- **Hướng của (C)**: khi **nhìn từ trên xuống**, (C) đi **ngược chiều kim đồng hồ**

Chiến lược tổng quát

Bài này:

- Đường (C) **không nằm trong mặt phẳng Oxy**
- Tham số hóa (C) → **rất mệt**

⇒ **Dùng Stokes để đổi sang tích phân mặt**, chọn mặt **dễ nhất**.

Bước 1. Viết định lý Stokes

$$\boxed{\oint_C \mathbf{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot d\vec{S}}$$

- (S): **bất kỳ mặt nào có biên là (C)**
- Ta **được quyền chọn mặt cho dễ**

Bước 2. Chọn mặt (S) cho dễ

Chọn **mặt phẳng**:

$$\boxed{y + z = 2}$$

vì:

- (C) **nằm trọn trên mặt phẳng này**
- Mặt phẳng → pháp tuyến **không đổi**
- Tính tích phân **nhẹ nhất**

Bước 3. Xác định pháp tuyến đúng hướng

Mặt phẳng:

$$y + z = 2 \;\Rightarrow\; z = 2 - y$$

Vector pháp tuyến:

$$\vec{n} = (0, 1, 1)$$

Kiểm tra hướng: Đề bài nói: *nhìn từ trên xuống, (C) đi ngược chiều kim đồng hồ*. Theo **quy tắc bàn tay phải**, pháp tuyến phải **hướng lên trên**.

$(0, 1, 1)$ có thành phần $z > 0$ ✓ ⇒ Dùng luôn pháp tuyến này.

Bước 4. Tính curl của F

Nhắc lại:

$$\mathbf{F} = (-y^2,\ x,\ z^2)$$

Công thức curl:

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix}$$

Tính từng thành phần:

Thành phần (i):

$$\frac{\partial z^2}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z} = 0 - 0 = 0$$

Thành phần (j):

$$\frac{\partial(-y^2)}{\partial z} - \frac{\partial z^2}{\partial x} = 0 - 0 = 0$$

Thành phần (k):

$$\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y^2)}{\partial y} = 1 - (-2y) = 1 + 2y$$

Kết luận curl:

$$\boxed{\operatorname{curl}\mathbf{F} = (0,\ 0,\ 1 + 2y)}$$

Bước 5. Tính $(\operatorname{curl}\mathbf{F}) \cdot \vec{n}$

$$(0,0,1+2y)\cdot(0,1,1) = 1+2y$$

Bước 6. Đổi tích phân mặt → tích phân phẳng

Vì:

$$z = 2 - y \;\Rightarrow\; dS = |\vec{n}|\, dA$$

Nhưng ở Stokes:

$$(\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot d\vec{S} = (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot \vec{n}\, dA$$

⇒ Không cần chia hay căn gì cả.

Bước 7. Xác định miền chiếu (D)

Do:

$$x^2 + y^2 = 1$$

⇒ Miền (D) là **hình tròn bán kính 1** trên mặt phẳng (xy).

Bước 8. Lập tích phân

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\vec{s} = \iint_D (1+2y)\, dx\, dy$$

Bước 9. Tính tích phân (cực quan trọng)

Tách ra:

$$\iint_D 1\, dxdy + 2\iint_D y\, dxdy$$

Tích phân thứ nhất:

$$\iint_D 1\, dxdy = \text{diện tích hình tròn} = \pi$$

Tích phân thứ hai:

$$\iint_D y\, dxdy = 0$$

Vì:

- Miền (D) **đối xứng qua trục Ox**
- Hàm y là **hàm lẻ**

Kết quả cuối

$$\boxed{\oint_C \mathbf{F} \cdot d\vec{s} = \pi}$$

Tóm tắt chiến thuật (cần thuộc)

Khi gặp bài Stokes kiểu này:

1. Không tham số hóa đường
2. Chọn mặt phẳng chứa (C)
3. Tính curl
4. Lấy tích vô hướng với pháp tuyến
5. Chiếu xuống miền tròn
6. Dùng đối xứng để diệt tích phân lẻ

Ví dụ trang 39 – Giải lại Bước 3–5–6

Bước 3 – Pháp tuyến là gì? Lấy ở đâu ra?

3.1. Vì sao phải cần pháp tuyến?

Định lý Stokes là:

$$\iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F}) \cdot d\vec{S}$$

Trong đó:

$$d\vec{S} = \vec{n}\, dS$$

Nghĩa là ta luôn phải biết vector pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt S.

3.2. Mặt (S) ta đã chọn là mặt nào?

Ta chọn:

$$\boxed{S:\ y + z = 2}$$

Viết lại cho dễ nhìn:

$$z = 2 - y$$

3.3. Cách tìm pháp tuyến của mặt phẳng (cực quan trọng)

Cách 1 (dễ nhất – nên nhớ) Mặt phẳng dạng:

$$Ax + By + Cz = D$$

Pháp tuyến luôn là:

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

Áp dụng vào bài này

$$y + z = 2 \quad \Rightarrow \quad 0x + 1y + 1z = 2$$

Pháp tuyến:

$$\boxed{\vec{n} = (0, 1, 1)}$$

3.4. Kiểm tra hướng của pháp tuyến (rất hay bị sai)

Đề bài nói: *nhìn từ trên xuống, đường (C) đi ngược chiều kim đồng hồ.*
Theo quy tắc bàn tay phải:

- Ngón tay khum theo chiều (C)
- Ngón cái chỉ hướng của pháp tuyến

Pháp tuyến phải hướng lên trên, tức là thành phần $z > 0$.
Vector $(0, 1, 1)$ có $z = 1 > 0 \Rightarrow$ đúng.

Bước 3 xong

Bước 5 – Tích vô hướng là gì, làm để làm gì?

Ta đã có:

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = (0, 0, 1 + 2y)$$

và

$$\vec{n} = (0, 1, 1)$$

5.1. Vì sao phải nhân hai vector này?

Trong Stokes:

$$(\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot d\vec{S} = (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \vec{n}\, dA$$

Luôn phải lấy tích vô hướng.

5.2. Công thức tích vô hướng (phải thuộc)

$$(a, b, c) \cdot (d, e, f) = ad + be + cf$$

5.3. Áp dụng vào bài

$$(0, 0, 1 + 2y) \cdot (0, 1, 1)$$

Tính từng hạng:

- $0 \cdot 0 = 0$
- $0 \cdot 1 = 0$
- $(1 + 2y) \cdot 1 = 1 + 2y$

Cộng lại:

$$\boxed{1 + 2y}$$

Bước 5 xong

Bước 6 – Vì sao không thấy dS, không có căn?

Đây là chỗ dễ loạn nhất, nên đọc kỹ.

6.1. Hai kiểu tích phân mặt (đừng lẫn)

Kiểu 1 (diện tích mặt):

$$\iint_S f \, dS$$

→ cần căn, độ dài pháp tuyến, rất mệt.

Kiểu 2 (Stokes – ta đang dùng):

$$\iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot d\vec{S}$$

Khác hoàn toàn.

6.2. Trong Stokes

$$d\vec{S} = \vec{n} \, dA$$

Nên:

$$(\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot d\vec{S} = (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \vec{n} \, dA$$

Không có căn, không chia, không chuẩn hóa gì cả.

6.3. Vì sao được phép chiếu xuống mặt phẳng (xy)?

Vì:

- Mặt (S) là mặt phẳng
- Biên chiếu xuống là $x^2 + y^2 \leq 1$

Ta đổi:

$$\iint_S (\cdots) \, d\vec{S} \;\Rightarrow\; \iint_D (\cdots) \, dxdy$$

6.4. Kết quả của bước 6

$$\boxed{\oint_C \mathbf{F} \cdot d\vec{s} = \iint_D (1 + 2y)\, dxdy}$$

Trong đó:

$$D: \; x^2 + y^2 \leq 1$$

Bước 6 xong

Tóm tắt siêu ngắn (để nhớ)

- B3: mặt phẳng $(Ax + By + Cz = D) \rightarrow$ pháp tuyến (A, B, C)
- B5: nhân curl với pháp tuyến $\rightarrow$ ra hàm số
- B6: Stokes không có căn, chỉ là dA

Ví dụ trang 44 – Giải SIÊU CHẬM

Ngày 22 tháng 1 năm 2026

ĐỀ BÀI (viết lại cho dễ đọc)

Cho trường vector:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, xz)$$

Gọi C là **giao tuyến** của:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

- Hướng của C: **ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ trên xuống**
- Yêu cầu: tính

  $$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\vec{s}$$

  bằng **hai cách**:

  1. Tính **trực tiếp**
  2. Dùng **định lý Stokes**

Ý tưởng tổng quát (để khỏi loạn)

- C là **đường tròn nghiêng trong không gian**
- Ta sẽ thấy:
  - Cách 1: làm được nhưng **dài**
  - Cách 2 (Stokes): **ngắn – gọn – chuẩn**

Ta làm **cả hai**, nhưng **từng bước một**

CÁCH 1 – TÍNH TRỰC TIẾP

Bước 1. Hiểu hình dạng đường C

Từ:

$$x^2 + y^2 = 1$$

hình trụ tròn bán kính 1, trục Oz
Cắt với:

$$x + y + z = 1 \Rightarrow z = 1 - x - y$$

C là **đường tròn bán kính 1**, nằm nghiêng trong không gian

Bước 2. Tham số hóa đường C

Vì có $x^2 + y^2 = 1$, ta **luôn luôn** đặt:

$$\boxed{\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi}$$

Thế vào phương trình mặt phẳng:

$$z = 1 - \cos t - \sin t$$

Tham số hóa đầy đủ:

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 1 - \cos t - \sin t)$$

Bước 3. Tính $d\vec{s} = \vec{r}'(t)\, dt$

Lấy đạo hàm **từng thành phần**:

- $\frac{d}{dt}(\cos t) = -\sin t$
- $\frac{d}{dt}(\sin t) = \cos t$
- $\frac{d}{dt}(1 - \cos t - \sin t) = \sin t - \cos t$

$$\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, \sin t - \cos t)$$

Bước 4. Tính $\mathbf{F}(\vec{r}(t))$

Nhắc lại:

$$\mathbf{F} = (xy, yz, xz)$$

Thay vào:

- $x = \cos t$
- $y = \sin t$

- $z = 1 - \cos t - \sin t$

$$\mathbf{F}(\vec{r}(t)) = (\cos t \sin t, \sin t(1 - \cos t - \sin t), \cos t(1 - \cos t - \sin t))$$

Bước 5. Tính tích vô hướng $\mathbf{F} \cdot d\vec{s}$

Ta tính:

$$\mathbf{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$$

Viết ra **đủ 3 hạng**:

$$\begin{aligned}
&(\cos t \sin t)(-\sin t) \\
&+ [\sin t(1 - \cos t - \sin t)](\cos t) \\
&+ [\cos t(1 - \cos t - \sin t)](\sin t - \cos t)
\end{aligned}$$

Rất dài → **không phải cách khôn ngoan**
Ta dừng **Cách 1 tại đây** để thấy: **làm được nhưng cực mệt**

CÁCH 2 – DÙNG STOKES (CHUẨN)

Bước 1. Viết định lý Stokes

$$\boxed{\oint_C \mathbf{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S (\text{curl}\,\mathbf{F}) \cdot d\vec{S}}$$

Bước 2. Chọn mặt S

Chọn **mặt phẳng**:

$$S: \quad x + y + z = 1$$

vì:

- C nằm trọn trên đó
- Mặt phẳng → dễ tính

Bước 3. Tìm pháp tuyến đúng hướng

Mặt phẳng:

$$x + y + z = 1$$

pháp tuyến:

$$\vec{n} = (1, 1, 1)$$

Kiểm tra hướng

- Đề: **nhìn từ trên xuống, C ngược chiều kim đồng hồ**
- Theo quy tắc bàn tay phải → pháp tuyến **hướng lên**

$$(1,1,1) \quad \text{có } z > 0 \Rightarrow \text{ĐÚNG}$$

Bước 4. Tính curl của F

$$\mathbf{F} = (xy, yz, xz)$$

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xy & yz & xz \end{vmatrix}$$

Tính từng thành phần:

- i: $\partial_y(xz) - \partial_z(yz) = 0 - y = -y$
- j: $\partial_z(xy) - \partial_x(xz) = 0 - z = -z$
- k: $\partial_x(yz) - \partial_y(xy) = 0 - x = -x$

$$\boxed{\operatorname{curl}\mathbf{F} = (-y, -z, -x)}$$

Bước 5. Lấy tích vô hướng với pháp tuyến

$$(\operatorname{curl}\mathbf{F}) \cdot \vec{n} = (-y, -z, -x) \cdot (1,1,1) = -(x+y+z)$$

Bước 6. Trên mặt S có gì đặc biệt?

Trên S:

$$x + y + z = 1$$

nên:

$$-(x+y+z) = -1$$

Bước 7. Đổi tích phân mặt → tích phân phẳng

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\vec{s} = \iint_D (-1)\, dA$$

Trong đó D là **hình tròn**:

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

Bước 8. Tính tích phân

$$\iint_D (-1)\, dA = -1 \cdot \text{diện tích hình tròn} = -\pi$$

KẾT LUẬN CUỐI

$$\boxed{\oint_C \mathbf{F} \cdot d\vec{s} = -\pi}$$

TÓM TẮT ĐỂ NHỚ

- **Cách 1**: tham số hóa → dài, dễ sai
- **Cách 2 (Stokes)**:
  1. Chọn mặt phẳng chứa C
  2. Tính curl
  3. Nhận ra biểu thức **hằng số**
  4. Nhân diện tích miền

Cách 2 là vũ khí chính khi đi thi

Ví dụ trang 49

Ngày 22 tháng 1 năm 2026

ĐỀ BÀI (viết lại cho dễ đọc)

Trong $\mathbb{R}^3$:

- S_1: **nửa mặt cầu trên**
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0$$
- S_2: **mặt paraboloid**
$$z = 1 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$$

Cả hai đều được định hướng lên trên
Cho $\vec{F}$ là **trường vector trơn** trên $\mathbb{R}^3$.
Chứng minh:
$$\iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

MỤC TIÊU THẬT SỰ CỦA BÀI NÀY

KHÔNG phải để tính tích phân cụ thể
KHÔNG cần biết $\vec{F}$ là gì
Mục tiêu:

> **Hiểu định lý Stokes nói gì và áp dụng đúng lúc**

BƯỚC 1 – NHẬN DẠNG ĐÂY LÀ BÀI GÌ?

Nhìn biểu thức:
$$\iint_{S} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$
Đây là **tích phân mặt của xoáy (curl)**
Không phải:

- tích phân mặt thông thường
- không phải thông lượng của $\vec{F}$

Đây là **bài Stokes chuẩn form**

NHẮC LẠI ĐỊNH LÝ STOKES (NÓI RÕ TỪNG CHỮ)

Phát biểu (phiên bản dễ hiểu)

Nếu:

- S là **mặt trơn có biên**
- $\partial S = C$ là **đường biên**
- định hướng của S và C **tương thích (quy tắc bàn tay phải)**

thì:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Ý NGHĨA CỰC KỲ QUAN TRỌNG

> **Tích phân mặt của curl KHÔNG phụ thuộc vào mặt, mà CHỈ phụ thuộc vào ĐƯỜNG BIÊN**

Miễn là:

- các mặt **chung cùng đường biên**
- định hướng **giống nhau**

BƯỚC 2 – TÌM ĐƯỜNG BIÊN CỦA S_1

Mặt cầu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0$$

Biên xảy ra khi:

$$z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Vậy:

- Đường biên của S_1 là **đường tròn đơn vị**
- nằm trong mặt phẳng $z = 0$

Gọi:

$$C : x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0$$

BƯỚC 3 – TÌM ĐƯỜNG BIÊN CỦA S_2

Mặt paraboloid:

$$z = 1 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$$

Biên xảy ra khi:

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ \Rightarrow 1 - x^2 - y^2 &= 0 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Vẫn là:

$$C : x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0$$

KẾT LUẬN QUAN TRỌNG NHẤT (CHỐT NÃO)

S_1 và S_2 có CÙNG ĐƯỜNG BIÊN
Cả hai cùng định hướng lên trên
$\Longrightarrow$ Đường biên C có cùng chiều

BƯỚC 4 – ÁP DỤNG ĐỊNH LÝ STOKES

Áp dụng cho S_1:

$$\iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Áp dụng cho S_2:

$$\iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Hai vế phải giống hệt nhau

SUY RA NGAY

$$\boxed{\iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}}$$

Q.E.D

NHỮNG ĐIỂM SINH VIÊN YẾU HAY NGÃ

Sai lầm 1

"Phải tính curl rồi tích phân"

SAI
Không cần tính gì hết

Sai lầm 2

"Hai mặt khác nhau thì tích phân khác nhau"

SAI trong Stokes
Curl-integral **chỉ phụ thuộc biên**

Sai lầm 3

"Không cần quan tâm định hướng"

CỰC KỲ SAI
Nếu 1 mặt hướng lên, 1 mặt hướng xuống → **đổi dấu**

CÁCH NHÌN ĐỂ GẶP BÀI LÀ CHỐT LUÔN

Khi thấy:

- $\iint (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$
- nhiều mặt khác nhau
- chung đường biên

Không tính
Không tham số
Không đạo hàm
Stokes → bằng nhau ngay
Juan.